Teorie reaktivního pohonu

David Klusáček
MFF UK
3.11.2011
`brmlab.cz/user/david`

Poloha

Je funkce $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. V čase t leží bod na souřadnicích $\vec{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))$. Např:

$\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$	rovnoměrný pohyb po přímce rychlostí 1 m/s
$\vec{r}(t) = (t, t - t^2, 0)$	šikmý vrh ve vakuu z $(0, 0, 0)$ do $(1, 0, 0)$
$\vec{r}(t) = (0, \sin(t) e^{-t/100}, 0)$	závaží na pružině
$\vec{r}(t) = (0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$	bod obíhající okolo osy x rychlostí 1 otáčka za sekundu

Rychlost

Rychlost bodu v čase t:

$$r^\bullet(t) \approx \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \qquad \text{pro velmi malé } h.$$

Vypočtením pro každé $t \in \mathbb{R}$ obdržíme funkci $r^\bullet : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která se nazývá $derivace$ původní funkce $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Příklad analytického výpočtu (neformálně, jako to dělal Newton) pro $r(t) = t^2$:

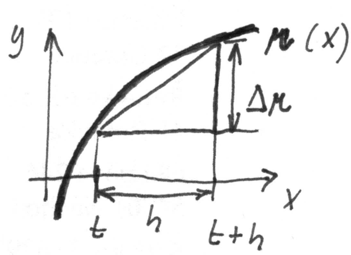
$r^\bullet(t) = (t^2)^\bullet = ((t+h)^2 - t^2)/h = (t^2 + 2ht + h^2 - t^2)/h = 2t + h$ avšak $h \to 0$, takže $r^\bullet(t) = 2t$

Zrychlení

Zrychlení je rychlost růstu *rychlosti*, kde *rychlost* je rychlost růstu polohy. $r^{\bullet\bullet}(t) = (r^\bullet)^\bullet(t)$

Derivace

kde $e = 2.71828182845 90\ldots$



$r(t)$	$r^\bullet(t)$	$r^{\bullet\bullet}(t)$
t^N	Nt^{N-1}	$N(N-1)t^{N-2}$
$\sin(t)$	$\cos(t)$	$-\sin(t)$
e^t	e^t	e^t
$\ln\lvert t\rvert$	$1/t$	$-1/t^2$
$f(\alpha t)$	$\alpha f^\bullet(\alpha t)$	$\alpha^2 f^{\bullet\bullet}(\alpha t)$
$f(t)+g(t)$	$f^\bullet(t)+g^\bullet(t)$	$f^{\bullet\bullet}(t)+g^{\bullet\bullet}(t)$
$f(t)g(t)$	$f^\bullet(t)g(t)+f(t)g^\bullet(t)$	$\ldots$
$f(g(t))$	$f^\bullet(g(t))g^\bullet(t)$	$\ldots$

Integrál — obrácení derivace

$r(a+h) \approx hr^\bullet(a)+r(a)$, tedy pro $b = a+kh$, kde $k \in \mathbb{N}$, máme $r(b) \approx r(a)+\sum_{p=0}^{k-1} r^\bullet(a+ph)h$.

$$r(b) \approx r(a) + \sum_{t=a,\ t+=h}^{b} r^\bullet(t)h \overset{h\to 0}{=} r(a) + \int_a^b r^\bullet(t)dt \qquad \text{budeme potřebovat} \int_1^T \frac{1}{t}dt = \ln(T)$$

Newtonův zákon síly (pro konstantní hmotnost)

$F(t) = mr^{\bullet\bullet}(t) = mv^{\bullet}(t) = ma(t)$ neboli $v(t) = v(0) + \int_0^t F(\tau)/m\, d\tau$

Magnetická dráha s konstantním zrychlením

Úniková rychlost z měsíce je $u = 2.4$ km/s, chceme zrychlení $a = 20$ m/s^2, jak dlouhá bude dráha a jaký bude potřeba výkon lineárního elektromotoru pro urychlení 100 tunového plavidla?

tah motoru $F = ma = 10^5 \cdot 20 = 2\,\mathsf{MN}$

rychlost $v(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau = \int_0^t 20dt = 20t$, čas urychlování $T = u/a = 2400/20 = 120\,\mathsf{s}$

uražená vzdálenost $r(T) = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T at\,dt = \frac{1}{2}aT^2 = 10{\cdot}120^2 = 144\,\mathsf{km}$

Potřebná energie na jeden start je $E = mu^2/2 = 10^5 \cdot 2400^2/2 = 288\,\mathsf{GJ} = 80\,\mathsf{MWh}$.

Výkon motoru $P(t) = E^{\bullet}(t) = (mv^2/2)^{\bullet}(t) = mv(t)v^{\bullet}(t) = mv(t)a(t) = F(t)v(t) = 2\,\mathsf{MN}\cdot 20\,t$. Potřebný výkon tedy neustále roste a na konci dráhy potřebujeme $P(T) = 2{\cdot}20{\cdot}120\,\mathsf{MW} = 4.8\,\mathsf{GW}$, tedy 2.4 Temelíny!

Magnetická dráha s konstantním výkonem motoru

Konstantní výkon znamená, že energie roste lineárně, tedy $E(t) = Pt$. Jelikož $E = mv^2/2$, dostaneme $tP = mv^2(t)/2$ odkud plyne

$$v(t) = \sqrt{\frac{2tP}{m}} \qquad v^{\bullet}(t) = \sqrt{\frac{P}{mt}} \qquad F(t) = \sqrt{\frac{mP}{t}} \qquad r(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = t\sqrt{\frac{8tP}{9m}}$$

4 Dráha s konstantním výkonem vs. zrychlením

Pro dráhu s konstantním zrychlením máme:

$$P_0 = mua \qquad T_0 = u/a \qquad r_0 = u^2/(2a) = T_0 u/2$$

U dráhy s konstantním výkonem chceme použít výkon $P = \alpha P_0$, kde α je např. 1/10.

$$T = \frac{mu^2}{2P} = \frac{mu^2}{2\alpha mua} = \frac{u}{2\alpha a} = \frac{1}{2\alpha} T_0$$

$$r = T\sqrt{\frac{8TP}{9m}} = T\sqrt{\frac{8\frac{mu^2}{2P}P}{9m}} = \frac{1}{2\alpha}T_0\sqrt{\frac{4u^2}{9}} = \frac{1}{3\alpha}T_0 u = \frac{2}{3\alpha} r_0$$

Číselně:

$$P_0 = 4.8\,\mathsf{GW} \qquad T_0 = 120\,\mathsf{s} \qquad r_0 = 144\,\mathsf{km}$$

tedy pro $\alpha = 1/5$

$$P = 960\,\mathsf{MW} \qquad T = 300\,\mathsf{s} \qquad r = 480\,\mathsf{km}$$

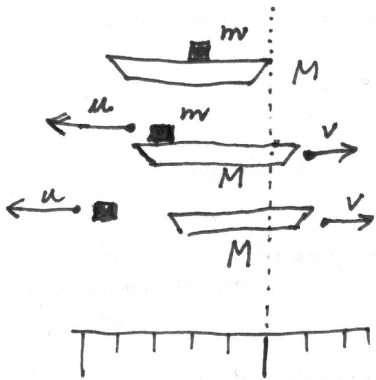
Sluneční elektrárna s panely dodávajícími 150 W z m^2 by mohl být čtverec o hraně 2.5 km nebo pruh podél dráhy široký 13 m.

Okamžik kdy zrychlení $v^\bullet(t)$ poklesne pod a:

$$a = v^\bullet(t) = \sqrt{\frac{P}{mt}} = \sqrt{\frac{\alpha mua}{mt}} \quad \text{tedy} \quad a^2 t = \alpha ua \quad \text{tedy} \quad t = \frac{\alpha u}{a} = \alpha T_0 = 24\,\mathsf{s}$$

Což nastane na 96 km dráhy tedy v její $1/5 = \alpha$.

Newtonův zákon akce a reakce



Vyhození hmoty m z plavidla o hmotnosti M rychlostí u (měřeno ze břehu). m urychlujeme konstantním zrychlením a_u po dobu $t = u/a_u$. Musíme tlačit silou $F = ma_u$, kterou nohama přenášíme na loď, čímž ji urychlujeme zrychlením $a_v = F/M = a_u m/M$ v opačném směru, takže po čase t dosáhne rychlosti $v = um/M$ vzhledem ke břehu. Výtoková rychlost vzhledem k lodi je $w = u + v$. Odtud

$$v = w\frac{m}{M+m}$$

Reaktivní pohon

Nyní budeme z lodi vyhazovat hmotnost Δm každých Δt sekund, přitom nám 'upadne' $(\alpha-1)\Delta m$ ještě před vymrštěním hmoty, takže spotřeba bude $\alpha\Delta m$ na jeden puls.

Hmotnost lodi $M(\Delta tk) = M_1 - \alpha\Delta mk$

Její rychlost

$$v(\underbrace{\Delta tk}_{T}) = v(0) + \sum_{p=0}^{k} \frac{w\cdot\Delta m}{M(\Delta tp)+\Delta m} = v(0) + w\sum_{\substack{t=0\\ t+=\Delta t}}^{T} \frac{\Delta m}{M_1 + \Delta m - \alpha t\Delta m/\Delta t}$$

U raketového motoru bereme $\Delta t \to 0$ a $\Delta m = Q\Delta t$, kde Q je hmotnostní průtok paliva tryskou (v kilogramech za sekundu). V čase T od startu

$$\Delta v = v(T) - v(0) = w \sum_{\substack{t=0 \\ t+=\Delta t}}^{T} \frac{Q\Delta t}{M_1 + Q\Delta t - \alpha t Q} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \int_0^T \frac{w}{M_1/Q - \alpha t} dt = \frac{w}{\alpha} \int_0^{\alpha T} \frac{1}{M_1/Q - t} dt$$

Jmenovatel se mění od $M_1/Q - \alpha T$ do M_1/Q. Nechť M_0 je hmotnost rakety po spotřebování paliva, neboli $M_0 = M_1 - \alpha Q T$. Odtud

$$\Delta v = \frac{w}{\alpha} \int\limits_{M_0/Q}^{M_1/Q} \frac{1}{t} dt = \frac{w}{\alpha} \left(\ln \frac{M_1}{Q} - \ln \frac{M_0}{Q} \right) = \frac{w}{\alpha} \ln \frac{M_1}{M_0}$$

Ciolkovského rovnice

$$\boxed{\Delta v = \frac{w}{\alpha} \ln \frac{M_1}{M_0}} \qquad \boxed{M_1 = M_0 \exp \frac{\Delta v \alpha}{w}}$$

Zajímavosti: Nezávisí na hustotě paliva, na Q, a je možné dosáhnout $\Delta v > w$, když $M_1/M_0 > e$.

Nezahrnuje však vliv odporu atmosféry ani stoupání rakety proti gravitaci (potenciální energii). Proto je v praxi potřeba brát Δv o něco větší — např. pro dosažení LEO zhruba 9.5 km/s.

Shrnutí

$$v(t) = \frac{w}{\alpha} \ln \frac{M_1}{M_1 - \alpha Q t} \qquad v^\bullet(t) = \frac{w}{\alpha} \frac{M_1 - \alpha Q t}{M_1} \frac{-M_1}{(M_1 - \alpha Q t)^2} (-\alpha Q) = \frac{wQ}{M_1 - \alpha Q t}$$

$$F(t) = (M - \alpha Q t) v^\bullet(t) = wQ$$

Práce vykonaná motorem

se dělí na 2 části: Kinetická energie rakety $E_R(t)$ a kinetická energie vyvržené hmoty $E_G(t)$. Energetická (celková) účinnost: $\eta_E = E_R/(E_R + E_G)$. Příkon motoru je $P_{tot}(t) = (E_G + E_R)^\bullet(t)$, užitečný výkon je $P_R(t) = E_R^\bullet(t)$. Účinnost v okamžiku t je $\eta_P(t) = P_R(t)/P_{tot}(t)$. Pro jednoduchost berme $\alpha = 1$.

$$E_R(t) = \frac{M(t) v^2(t)}{2} = (M_1 - Qt) \frac{w^2}{2} \ln^2 \frac{M_1}{M_1 - Qt} \qquad E_G(k\Delta t) = \sum_{p=0}^{k} Q \Delta t \frac{(v(p\Delta t) - w)^2}{2}$$

$$E_G(T) = \int_0^T \frac{Q}{2} \left(w \ln \frac{M_1}{M_1 - Qt} - w \right)^2 dt$$

Výkon

$$P_G(t) = E_G^\bullet(t) = \frac{Qw^2}{2} \left(\ln \frac{M_1}{M_1 - Qt} - 1 \right)^2 = \frac{Qw^2}{2} \left(\ln^2 \frac{M_1}{M_1 - Qt} - 2 \ln \frac{M_1}{M_1 - Qt} + 1 \right)$$

$$P_R(t) = E_R^\bullet(t) = -\frac{Qw^2}{2} \left(\ln^2 \frac{M_1}{M_1 - Qt} - 2 \ln \frac{M_1}{M_1 - Qt} \right) \quad \text{tedy} \quad P_{tot}(t) = \frac{Qw^2}{2}$$

Okamžitá:

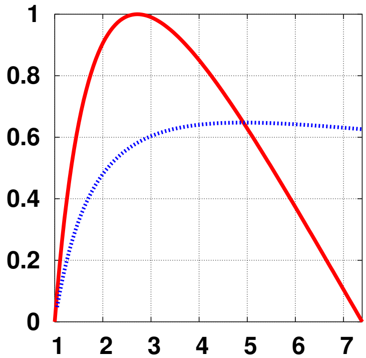
$$\eta_P(t) = 2\ln\frac{M_1}{M_1-Qt} - \ln^2\frac{M_1}{M_1-Qt}$$

maximum $\eta_P = 1$ pro $M_0 = M_1/e$, 0 pro $M_0 = M_1/e^2$

Celková (kde $E_{tot}(T) = \int_0^T P_{tot}(t)dt = TQw^2/2$ a $M_0 = M_1 - Qt$):

$$\eta_E(t) = \frac{E_R}{E_{tot}} = \left(\frac{M_1 - tQ}{tQ}\right)\ln^2\frac{M_1}{M_1 - Qt} = \frac{M_0}{M_1 - M_0}\ln^2\frac{M_1}{M_0} = \frac{1}{M_1/M_0 - 1}\ln^2\frac{M_1}{M_0}$$

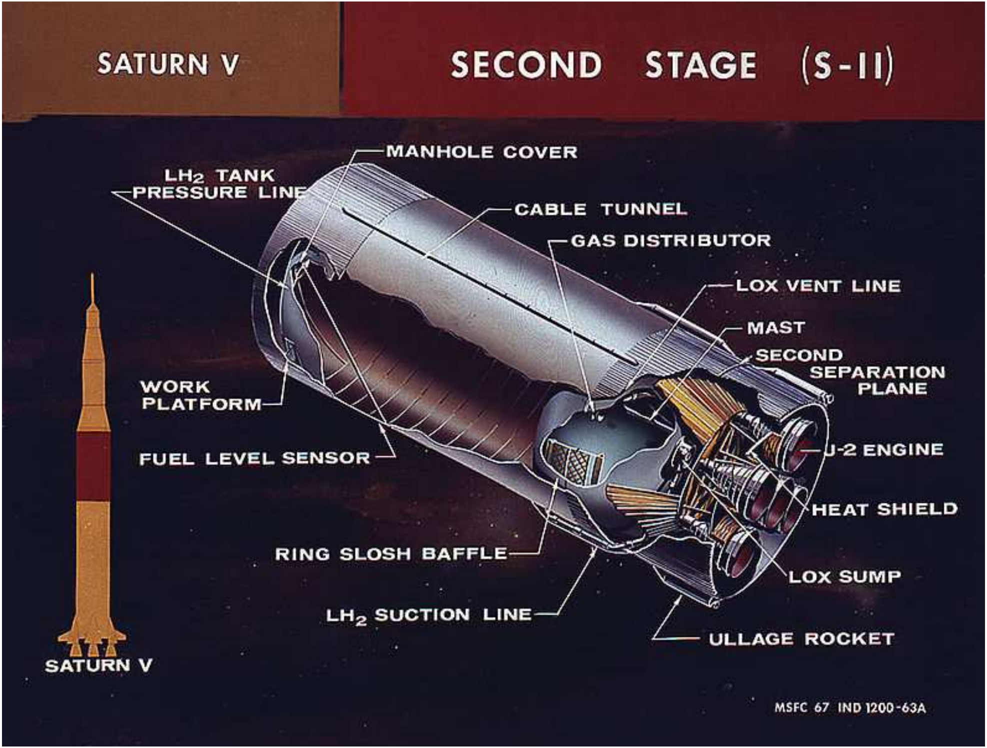
Závislost η_P (červeně) a η_E (modře) na poměru $M_1/M_0 = \exp(\Delta v/w)$. Optimum η_E je $0.6476\ldots$ a nastává pro $M_1/M_0 = 4.9215\ldots$, tedy $\Delta v = 1.5936w$.

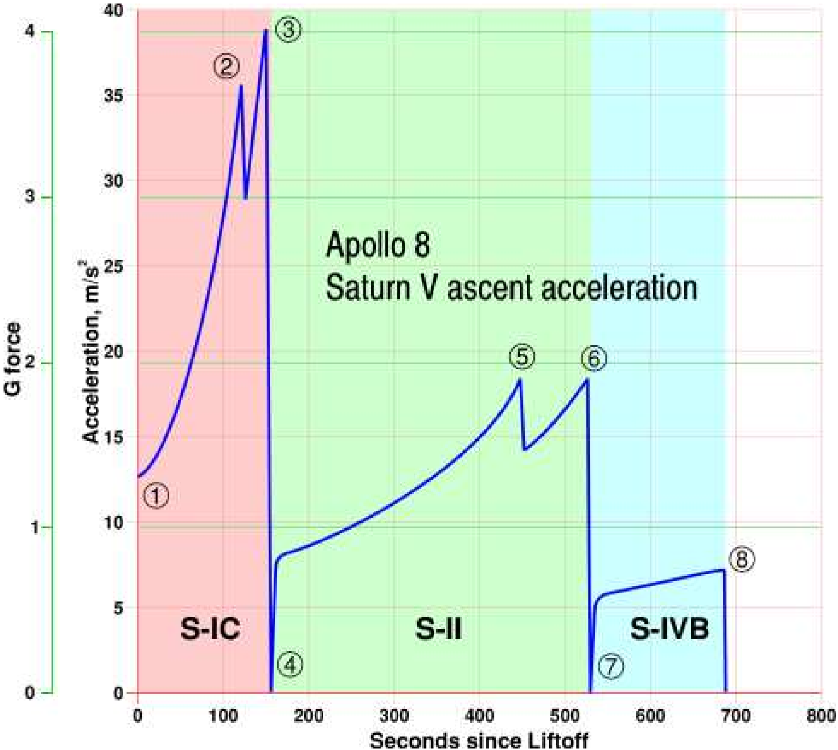


Důsledky

100% účinnosti je dosahováno, když se výtoková rychlost přesně rovná rychlosti pohybu. Reaktivní motor s měnitelnou výtokovou rychlostí by tak mohl dosáhnout podstatně větší účinnosti než 64%. Dnes se místo toho staví stupně s různými motory.

U letadel je snaha o velké Q: Turboventilátorové motory.


SATURN V
SECOND STAGE (S-II)
MANHOLE COVER
LH2 TANK PRESSURE LINE
CABLE TUNNEL
GAS DISTRIBUTOR
LOX VENT LINE
MAST
SECOND SEPARATION PLANE
WORK PLATFORM
J-2 ENGINE
FUEL LEVEL SENSOR
HEAT SHIELD
RING SLOSH BAFFLE
LOX SUMP
LH2 SUCTION LINE
ULLAGE ROCKET
SATURN V
MSFC 67 IND 1200-63A


Apollo 8
Saturn V ascent acceleration
G force
Acceleration, m/s²
Seconds since Liftoff
S-IC
S-II
S-IVB
0
1
2
3
4
5
10
15
20
25
30
35
40
100
200
300
400
500
600
700
800
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧

Motor J2

Tah: $F = 1.023$ MN
Výtoková rychlost: $w = 4168$ m/s

Saturn V / S-II

Prázdná hmotnost: $M_E = 35\,402$ kg
Hmotnost paliva: $M_F = 452\,625$ kg
Hmotnost nákladu: $M_L = 174\,125$ kg
Počet motorů: $4 + 1$
Doba hoření: $t_1 = 367$ s, střední motor jen $t_2 = 275$ s

$M_0 = M_L + M_E = 209527$ a $M_1 = M_0 + M_F = 662152$ odtud

$\eta_E = (M_1/M_0 - 1)^{-1} \ln^2(M_1/M_0) = 0.613$ (α zanedbáno!)

Výtok paliva z nádrže: $4 \cdot \alpha Q \cdot 367 + \alpha Q \cdot 275 = M_F$

Tedy $\alpha Q = 260$ kg/s.

Tah $F = wQ$, čili $Q = F/w = 1023000/4168 = 245$ kg/s

Tedy $\alpha = 1.058$, neboli 5.8% paliva pohání turbočerpadla.

$\Delta v = (w/\alpha) \ln(M_1/M_0) = 4533$ m/s

skutečná rychlost $\Delta v = 4224$ m/s (díky stoupání $50 \rightarrow 190$ km a odporu atmosféry)

Další informace o Apollu: `http://www.sworld.com.au/steven/space/apollo/sim/`

Vede na α menší než 1. Ciolkovského rovnici už lze použít jen jako horní odhad Δv motoru, protože už nelze zanedbat odpor prostředí. Příklady:

ScramJet

První stupeň obsahuje jen kapalný vodík, kyslík se bere ze vzduchu. Kyslík má 16 nukleonů, takže při vytváření H_2O bereme na 1 kg vodíku 8 kg kyslíku z okolí, tedy $\alpha = 1/8$ a podle Ciolkovského rovnice máme jakoby osminásobnou výtokovou rychlost. Zanedbal jsem ale dusík v atmosféře a tření, které je značné.

Ejector

Plánovaný ale neuskutečněný na raketě N-1. První stupeň měl mít uprostřed kanál, kterým by byl vzduch strháván dolů uprostřed plamenného tubusu. Tím by došlo ke snížení w a zároveň zvýšení Q, což by vedlo k vyšší účinnosti pohonu v počáteční fázi letu.

Proudový motor

Sice se na něj C. rovnice nevztahuje, ale často se udává specifický impuls w/α což vede k překvapivě velkým hodnotám. Např. GE-CF6 (Boeing 747) má 60000 m/s.